在本节中，我们介绍拓扑流形，这是流形的最基本类型。 我们假设读者熟悉拓扑空间的定义和基本属性，如附录A所述.

假设是一个**拓扑空间**.我们说是**维数为的拓扑流形**或**拓扑流形**,如果它具有以下性质:

1. 是**Hausdorff空间**:对于每对不同的点;存在不相交的开放子集,使得和.
2. 是**第二可数的**:的拓扑存在可数的基础.
3. 是**局部维的欧几里得**:的每个点都具有一个邻域与的开放子集同胚.

第三个属性意味着,更确切地说,对于每个,我们可以找到

1. 一个包含的开子集,
2. 一个开子集,以及
3. 一个同胚.

**定理1.2(维数的拓扑不变性)** 一个非空维拓扑流形是与另一个维流形是非同构的,除非.

坐标图[Coordinate Charts]

令为拓扑流形.上的**坐标图[coordinate chart]**(或只是一个**图[chart]**)是一个对,其中是的一个开子集并且是从到开子集的同胚(图1.2).根据拓扑流形的定义,每一个点包含在某个图的域中.如果,我们说图表以为中心.如果是其域包含的任意图,则减去常数矢量可以很容易地获得以为中心的新图.

给定一个图,我们称集合为**坐标域**,或其每个点的**坐标邻域**.另外,如果是中的开球,则称为坐标球[coordinate ball];如果是一个开放立方体,则是一个坐标立方体.映射被称为(局部)坐标映射,由定义的的分量函数被称为U的**局部坐标**.如果我们想强调坐标函数而不是坐标映射,有时我们用或表示图.

引理1.10 每个拓扑流形都有一个非常紧凑的预紧坐标球基础.

坐标球基的存在对流形的连通性具有重要影响.回想一下,拓扑空间X为

如果不存在X的两个不相交的，非空的，开放的子集且其并集为X，则连接；

如果X中的每对点都可以通过X中的路径连接，则为路径连接； 和

如果X具有路径连接的开放子集的基础，则为本地路径连接.

命题1.11 令M为拓扑流形.

M是本地路径连接的。

M仅在路径连接时才连接.

M的成分与其路径成分相同.

M具有无数个组件，每个组件都是M的一个开放子集和一个连通的拓扑流形.

命题1.12(歧管在局部上是紧凑的) 每个拓扑流形都是局部紧凑的.

令为拓扑空间.如果的每个点的邻域最多与中有限个集合相交,则称的子集的集合是**局部有限[locally finite]**的.给定M的两个覆盖,如果对于每一个存在某些使得,则称为的**细化[refinement]**.我们说，如果的每个开覆盖都承认一个开放的局部有限细化，则是**超紧致的[paracompact]**.

引理1.13 假设是拓扑空间的子集的局部有限集合.

集合同样也是局部有限.

.

**定理1.15(流形是超紧缩的)** 每个拓扑流形都是超紧凑的.实际上,给定拓扑流形,的开覆盖,和M拓扑的任意基,存在由的元素组成的的可数的,局部有限的开放细化.

**命题1.16** 拓扑流形的基本群是可数的.